Exame de Lógica Matemática
Duração: 3 horas

Docente: Fernando Ferreira

1. Considere os seguintes conjuntos:

   1- O conjunto (dos números de Gödel) das sentenças válidas da lógica de primeira-ordem na linguagem plena.

   2- O conjunto (dos números de Gödel) das tautologias do cálculo proposicional.

   3- O conjunto (dos números de Gödel) das sentenças aritméticas verdadeiras em $\mathbb{N}$.

   4- O conjunto (dos números de Gödel) das sentenças da linguagem da teoria dos corpos verdadeiras em $\mathbb{C}$.

   5- O conjunto (dos números de Gödel) das sentenças que são consequências duma teoria recursivamente axiomatizável.

   Classifique (sem justificar) cada um destes conjuntos em relação às seguintes propriedades: (a) recursivo; (b) recursivamente enumerável; (c) aritmético e (d) conjunto completo de sentenças. [Faça uma tabela de vinte entradas.]

2. Considere a validade lógica $\forall x \exists y R(x, y) \vee \exists x \forall y \neg R(x, y)$, onde R é um símbolo relacional binário (pode supor que a linguagem também inclui uma constante c).

   a) Ponha a fórmula acima numa forma prenexa com um prefixo de quatro quantificadores que comece e termine num quantificador existencial.

   b) Obtenha uma Herbrandização da forma prenexa que encontrou na alínea anterior e exiba termos correspondentes que advêm do Teorema de Herbrand.

3. Seja $(\mathcal{M})_{i \in \mathbb{N}}$ uma família de interpretações duma dada linguagem de primeira-ordem com igualdade. Suponha que, para cada $i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}_i$ é uma sub-estrutura elementar de $\mathcal{M}_{i+1}$. Define-se a estrutura $\mathcal{M}_\infty$ de acordo com as seguintes especificações:

   i. $|\mathcal{M}_\infty| = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} |\mathcal{M}_i|$.

   ii. $R^{\mathcal{M}_\infty} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} R^{\mathcal{M}_i}$, para os símbolos relacionais R da linguagem.

   iii. $f^{\mathcal{M}_\infty} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f^{\mathcal{M}_i}$, para os símbolos funcionais f da linguagem (aqui, as funções são encaradas como conjuntos de pares ordenados).

   iv. $c^{\mathcal{M}_\infty} = c^{\mathcal{M}_0}$, para as constantes c da linguagem.

   Mostre que, para todo $i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}_i$ é uma sub-estrutura elementar de $\mathcal{M}_\infty$.

4. (a) Enuncie e demonstre o teorema de Löwenheim-Skolem ascendente para linguagens numeráveis.

   (b) Enuncie e demonstre o teste de completude de Lós-Vaught.

5. a) Diga o que é uma relação Σ_1.
   b) Mostre que uma função parcial de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{N}$ é recursiva parcial se, e somente se, o seu gráfico é Σ_1.

6. (a) Diga o que é um conjunto Π_1-completo.
   (b) Mostre que o conjunto $E = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x^{(1)}$ é a função vazia$\}$ é Π_1.
   (c) Mostre que o conjunto $E = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x^{(1)}$ é a função vazia$\}$ é Π_1-completo. [Sugestão: mostre que $\mathbb{N} \setminus E$ é Σ_1-completo.]

7. a) O que significa dizer que uma fórmula $Ded_{\mathsf{PA}}(x)$ satisfaz as condições de dedutibilidade para a teoria da aritmética de Peano PA?
   b) Seja G_{PA} a fórmula fechada de Gödel que assevera a sua própria não dedutibilidade em PA (enunciada com respeito a $Ded_{\mathsf{PA}}(x)$, como na alínea anterior). Mostre que $\mathsf{PA} \vdash Cons_{\mathsf{PA}} \leftrightarrow G_{\mathsf{PA}}$.